

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МЕМБРАННЫХ ПОКРЫТИЙ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ

Крысько А.А.

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, 286123, Донецкая Народная Республика, г. Макеевка, ул. Державина, 2, a.a.krysko@donnasa.ru

**Аннотация.** В статье предлагается аналитическое описание и компьютерные модели трёх криволинейных поверхностей мембранного покрытия на прямоугольном плане, которые включают модель поверхности, вогнутую в одном направлении, в двух направлениях и выпукло-вогнутую. Все модели получены на основе следующей концептуальной последовательности действий: геометрическая схема модели – аналитическое описание в БН-исчислении – компьютерная модель искомой поверхности. Такой подход позволяет не только получить компьютерную модель искомого геометрического объекта в нужной параметризации, но и внести необходимые корректировки на каждом этапе моделирования. Геометрически все направляющие и образующие линии моделируемых поверхностей состоят из таких простейших геометрических объектов, как прямые и окружности. Вместе с тем они были определены не только в нужной параметризации таким образом, но и с учётом их взаимного положения, определяющего исходные опорные линии и заданную величину максимального прогиба балки и мембранных оболочек. Полученные аналитические описания геометрических объектов объединены в вычислительный алгоритм, реализованный в программном пакете Maple. В результате чего визуализированные компьютерные модели полученных поверхностей были экспортированы в формат dxf с учётом необходимой плотности конечных элементов прямоугольной формы для непосредственного импорта в систему конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций SCAD Office с последующим проведением вычислительного эксперимента. Таким образом, вся геометрическая информация с учётом выбора плотности конечно-элементной сети обеспечивается предложенным подходом к моделированию оболочек мембранных покрытий по наперёд заданным условиям, а физико-механические свойства материала необходимые для расчёта напряжённо-деформированного состояния конструкций, задаются непосредственно в вычислительной системе конечно-элементного анализа в процессе моделирования.

**Ключевые слова:** геометрическое моделирование, криволинейная поверхность, линейчатая поверхность, мембранное покрытие, прямоугольный план, дуга окружности.

## ВВЕДЕНИЕ

При проведении вычислительного эксперимента по компьютерному исследованию напряжённо-деформированного состояния поверхности мембранного покрытия на прямоугольном плане, выполненного из тонколистовой стали и опирающегося на сварные двутавровые балки, возникла необходимость получить аналитическое описание геометрической модели этой поверхности в необходимой параметризации. В результате была поставлена следующая задача, состоящая из трёх частей:

Получить аналитическое описание и компьютерную модель поверхности мембранного покрытия на прямоугольном плане и опорной двутавровой балки вогнутых в одном направлении;

Получить аналитическое описание и компьютерную модель поверхности мембранного покрытия на прямоугольном плане и опорной двутавровой балки вогнутых в двух направлениях;

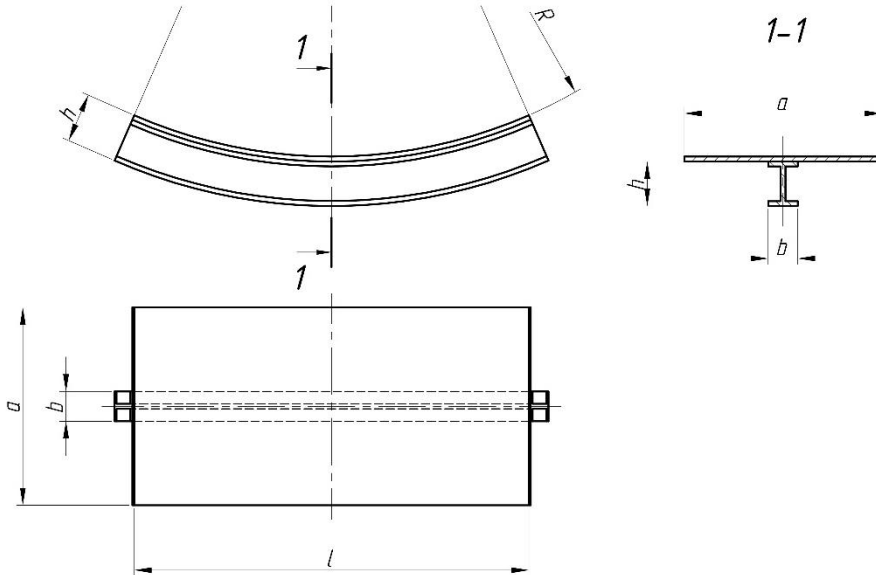
Получить аналитическое описание и компьютерную модель выпукло-вогнутых поверхностей мембранного покрытия на прямоугольном плане и опорной двутавровой балки.

Конструктивно все направляющие и образующие искомым отсеков поверхностей состоят из простейших геометрических объектов: прямых и окружностей. Вместе с тем их нужно определить в нужной параметризации таким образом, чтобы отсеки поверхностей проходили через наперёд заданные опорные прямые и при этом определялись наперёд заданной величиной максимального прогиба. Подобные поверхности технических форм удобно параметризовать путём проведения их через наперёд заданные точки [1-2] методом подвижного симплекса [3-4].

Для аналитического описания искомым поверхностей в виде точечных уравнений и вычислительных алгоритмов их формирования используется математический аппарат БН-исчисления [5-7].

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ  
МЕМБРАННОГО ПОКРЫТИЯ НА  
ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ И  
ОПОРНОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ  
ВОГНУТЫХ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ**

На рисунке 1 представлена общая геометрическая схема мембранного покрытия на прямоугольном плане и опорной двутавровой балки вогнутых в одном направлении.

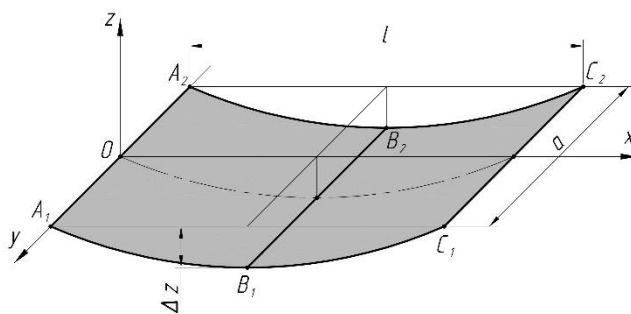


**Рис. 1.** Общая геометрическая схема мембранного покрытия с опорной балкой, вогнутые в одном направлении  
**Fig. 1.** General geometric scheme of a membrane covering with a support beam, concave in one direction

**Моделирование поверхности мембранного  
покрытия, вогнутого в одном направлении**

Поверхность мембранного покрытия представляет собой оболочку, построенную по следующей геометрической схеме: три отрезка

прямых  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  являются направляющими для построения поверхности, а дуга окружности  $N_A N_B N_C$  – образующей (рис. 2).



**Рис. 2.** Геометрическая схема линейчатой поверхности мембранного покрытия  
**Fig. 2.** Geometric scheme of the linear surface of the membrane covering

Точечные уравнения направляющих прямых линий имеют следующий вид:

$$N_A = A_1\bar{t} + A_2t, \quad N_B = B_1\bar{t} + B_2t, \quad N_C = C_1\bar{t} + C_2t,$$

где  $t$  – текущий линейный параметр, который принадлежит интервалу:  $0 \leq t \leq 1$ ;

$\bar{t} = 1 - t$  – дополнение параметра  $t$  до 1.

Для определения образующей окружности используем точное уравнение окружности, проходящей через три точки [8]. Применительно к обозначениям точек, приведенным на геометрической схеме (рис. 1), получим:

$$M = (N_A - N_C) \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + (N_B - N_C) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + N_C,$$

где  $\beta = \angle N_A N_B N_C$  – угол при вершине  $N_B$  треугольника  $N_A N_B N_C$ ;

$\gamma = \angle N_B N_C N_A$  – угол при вершине  $N_C$  треугольника  $N_A N_B N_C$ ;

$\varphi$  – текущий угловой параметр, который принадлежит интервалу:  $0 \leq \varphi \leq (\pi - \beta)$ .

Подставив в точечное уравнение окружности уравнения прямых получим точечное уравнение линейчатой поверхности:

$$M = (A_1 \bar{t} + A_2 t - C_1 \bar{t} - C_2 t) \lambda + (B_1 \bar{t} + B_2 t - C_1 \bar{t} - C_2 t) \psi + C_1 \bar{t} + C_2 t,$$

где  $\lambda = \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma}$ ,  $\psi = \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}$ .

Полученное уравнение линейчатой поверхности представлено в символьной точечной форме, которую сводим к параметрической посредством покоординатного расчёта. В результате получим базовую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = (x_{A_1} \bar{t} + x_{A_2} t - x_{C_1} \bar{t} - x_{C_2} t) \lambda + (x_{B_1} \bar{t} + x_{B_2} t - x_{C_1} \bar{t} - x_{C_2} t) \psi + x_{C_1} \bar{t} + x_{C_2} t; \\ y = (y_{A_1} \bar{t} + y_{A_2} t - y_{C_1} \bar{t} - y_{C_2} t) \lambda + (y_{B_1} \bar{t} + y_{B_2} t - y_{C_1} \bar{t} - y_{C_2} t) \psi + y_{C_1} \bar{t} + y_{C_2} t; \\ z = (z_{A_1} \bar{t} + z_{A_2} t - z_{C_1} \bar{t} - z_{C_2} t) \lambda + (z_{B_1} \bar{t} + z_{B_2} t - z_{C_1} \bar{t} - z_{C_2} t) \psi + z_{C_1} \bar{t} + z_{C_2} t. \end{cases}$$

Координаты узловых точек, определяющих их взаимное положение, принимаем в соответствии с геометрической схемой (рис. 1):

$$x_{A_1} = 0; y_{A_1} = \frac{a}{2}; z_{A_1} = 0; \quad x_{A_2} = 0; y_{A_2} = -\frac{a}{2}; z_{A_2} = 0;$$

$$x_{B_1} = \frac{l}{2}; y_{B_1} = \frac{a}{2}; z_{B_1} = -\Delta z; \quad x_{B_2} = \frac{l}{2}; y_{B_2} = -\frac{a}{2}; z_{B_2} = -\Delta z;$$

$$x_{C_1} = l; y_{C_1} = \frac{a}{2}; z_{C_1} = 0; \quad x_{C_2} = l; y_{C_2} = -\frac{a}{2}; z_{C_2} = 0.$$

Подставив координаты узловых точек в базовую систему параметрических уравнений, получим параметрические уравнения поверхности мембранного покрытия, вогнутого в одном направлении:

$$\begin{cases} x = -l \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} - l \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + l; \\ y = a \left( \frac{1}{2} - t \right); \\ z = -\Delta z \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}. \end{cases}$$

Воспользуемся программным пакетом Maple для визуализации поверхности мембранного покрытия, вогнутого в одном направлении (рис. 3). При этом следует задать необходимую плотность

прямоугольных элементов для экспорта в формат dxf с последующим импортом компьютерной модели поверхности мембранного покрытия в систему конечно-элементного анализа.

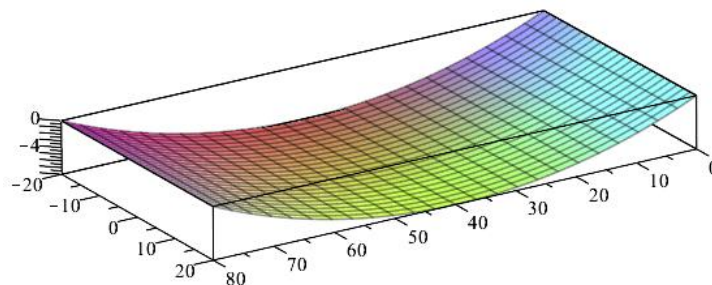
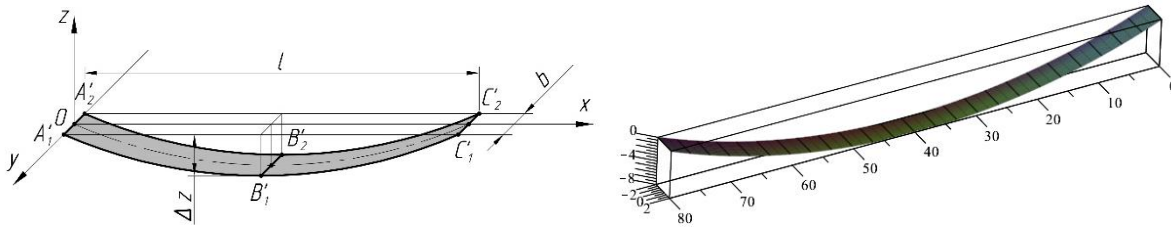


Рис. 3. Визуализация поверхности мембранного покрытия

Fig. 3. Visualization of the membrane covering surface

**Моделирование линейчатой поверхности верхней полки двутавровой балки для мембранного покрытия вогнутого в одном направлении**

Верхняя полка двутавра совпадает с поверхностью мембранного покрытия, только ограниченная более короткими отрезками  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  (рис. 4).



**Рис. 4.** Геометрическая схема линейчатой поверхности верхней полки двутавра и её визуализация  
**Fig. 4.** Geometric scheme of the linear surface of the top shelf of the I-beam and its visualization

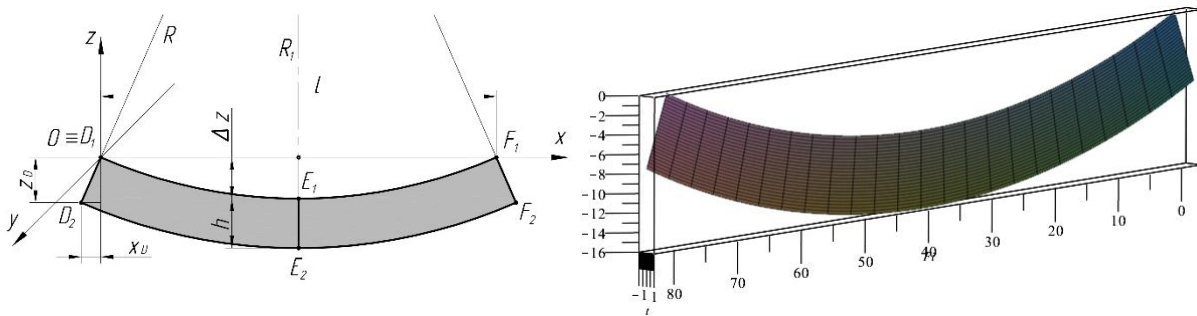
По аналогии с поверхностью оболочки мембранного покрытия, получим параметрические уравнения верхней полки:

$$\begin{cases} x = -l \left( \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right); \\ y = b \left( \frac{1}{2} - t \right); \\ z = -\Delta z \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}. \end{cases}$$

На рисунке 4 приведена визуализация поверхности верхней полки опорного двутавра, для покрытия вогнутого в одном направлении, выполненная с помощью программного пакета Maple.

**Моделирование линейчатой поверхности стенки двутавровой балки для мембранного покрытия вогнутого в одном направлении**

Стенка двутавра представляет собой оболочку, построенную методом подвижного симплекса, описанному выше. Направляющими являются отрезки  $D_1D_2$ ,  $E_1E_2$  и  $F_1F_2$ , а образующей – дуга окружности (рис.5).



**Рис. 5.** Геометрическая схема линейчатой поверхности стенки двутавра и её визуализация  
**Fig. 5.** Geometric scheme of the linear surface of the I-beam wall and its visualization

В этом случае точечное уравнение поверхности будет следующим:

$$M = (D_1\bar{t} + D_2t - F_1\bar{t} - F_2t) \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + (E_1\bar{t} + E_2t - F_1\bar{t} - F_2t) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + C_1\bar{t} + C_2t.$$

Базовая система параметрических уравнений получается по аналогии с предыдущим случаем, однако в виду больших размеров здесь не приводится.

Координаты узловых точек:

$$\begin{aligned} x_{D_1} = 0; \quad y_{D_1} = 0; \quad z_{D_1} = 0; \quad x_{D_2} = -x_D; \quad y_{D_2} = 0; \quad z_{D_2} = -z_D; \\ x_{E_1} = \frac{l}{2}; \quad y_{E_1} = 0; \quad z_{E_1} = -\Delta z; \quad x_{E_2} = \frac{l}{2}; \quad y_{E_2} = 0; \quad z_{E_2} = -\Delta z - h; \\ x_{F_1} = l; \quad y_{F_1} = 0; \quad z_{F_1} = 0; \quad x_{F_2} = l + x_D; \quad y_{F_2} = 0; \quad z_{F_2} = -z_D. \end{aligned}$$

Подставив координаты узловых точек в базовую систему параметрических уравнений, получим параметрические уравнения поверхности стенки двутавра:

$$\begin{cases} x = -(2x_D t + l) \left( \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right) - x_D t; \\ y = 0; \\ z = (-\Delta z - ht + z_D t) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - z_D t. \end{cases}$$

Исходя из подобия треугольников (рис. 5)  $\frac{h}{R} = \frac{z_D}{R_1} = \frac{x_D}{l/2}$ . Отсюда находим  $x_D$  и  $z_D$ :

$$z_D = \frac{h(R - \Delta z)}{R}; \quad x_D = \frac{hl}{2R}.$$

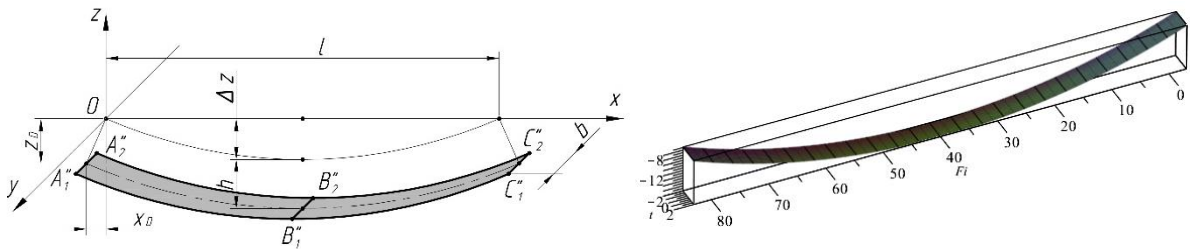
Тогда итоговые параметрические уравнения поверхности будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = -\left(2 \frac{hl}{2R} t + l\right) \left( \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right) - \frac{hl}{2R} t; \\ y = 0; \\ z = \left(-\Delta z - ht + \frac{h(R - \Delta z)}{R} t\right) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{h(R - \Delta z)}{R} t. \end{cases}$$

На рисунке 5 приведена визуализация поверхности стенки опорного двутавра, для покрытия, вогнутого в одном направлении, выполненная с помощью программного пакета Maple.

**Моделирование линейчатой поверхности нижней полки двутавровой балки для мембранного покрытия вогнутого в одном направлении**

Для моделирования нижней полки используем точечное уравнение линейчатой поверхности и базовую систему параметрических уравнений, полученную для мембранного покрытия. По аналогии с верхней полкой двутавра, направляющими будут отрезки  $A_1''A_2''$ ,  $B_1''B_2''$ ,  $C_1''C_2''$ , а образующей – дуга окружности (рис. 6).



**Рис. 6.** Геометрическая схема линейчатой поверхности нижней полки двутавра и её визуализация  
**Fig. 6.** Geometric scheme of the linear surface of the lower shelf of the I-beam and its visualization

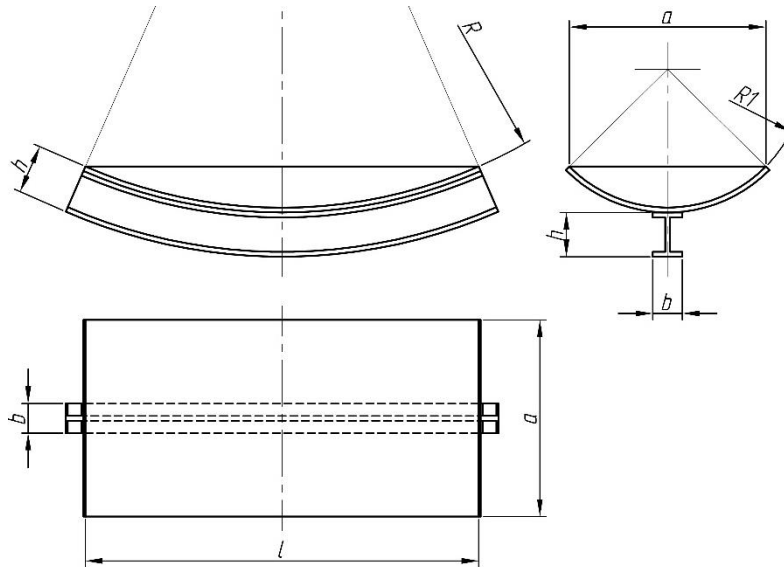
С учётом координат исходных точек, получим следующие параметрические уравнения искомой линейчатой поверхности:

$$\begin{cases} x = -\left(2 \frac{hl}{2R} t + l\right) \left( \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right) - \frac{hl}{2R} t; \\ y = \frac{b}{2}; \\ z = -\Delta z \left( \frac{R + h}{R} \right) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{h(R - \Delta z)}{R} t. \end{cases}$$

На рисунке 6 приведена визуализация поверхности нижней полки опорного двутавра, для покрытия, вогнутого в одном направлении, выполненная с помощью программного пакета Maple.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ  
МЕМБРАННОГО ПОКРЫТИЯ НА  
ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ И  
ОПОРНОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ  
ВОГНУТЫХ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИИ**

На рисунке 7 представлена общая геометрическая схема мембранного покрытия на прямоугольном плане и опорной двутавровой балки вогнутых в двух направлениях.

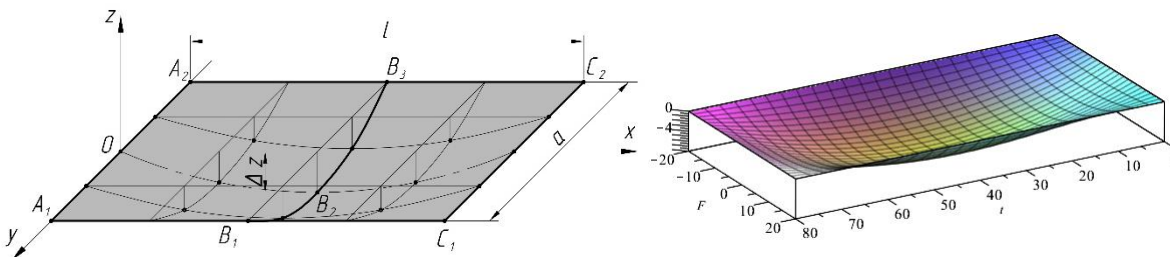


**Рис. 7.** Общая геометрическая схема мембранного покрытия с опорной балкой, вогнутого в двух направлениях  
**Fig. 7.** General geometric scheme of a membrane covering with a support beam, concave in two directions

**Моделирование поверхности мембранного покрытия, вогнутого в двух направлениях**

Поверхность мембранного покрытия представляет собой оболочку, построенную по следующей схеме: два отрезка прямых  $A_1A_2$ ,  $C_1C_2$  и

окружность  $B_1B_2B_3$  являются направляющими линиями для построения поверхности. Образующая линия представляет собой дугу окружности, проходящую через 3 наперед заданные точки (рис. 8).



**Рис. 8.** Геометрическая схема линейчатой поверхности мембранного покрытия и её визуализация  
**Fig. 8.** Geometric scheme of the linear surface of the membrane covering and its visualization

Точечное уравнение образующей дуги окружности, проходящей через три точки [8] в системе принятых обозначений (рис. 8), имеет следующий вид:

$$M = (N_A - N_C) \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + (N_B - N_C) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + N_C, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq (\pi - \beta).$$

Точечные уравнения направляющих линий:

$$N_A = A_1 \bar{t} + A_2 t, \quad N_B = (B_1 - B_3) \frac{\sin(\beta' + \varphi') \sin(\gamma' - \varphi')}{\sin \beta' \sin \gamma'} + (B_2 - B_3) \frac{2 \cos \gamma' \sin(\beta' + \varphi') \sin \varphi'}{\sin \beta' \sin \gamma'} + B_3, \quad N_C = C_1 \bar{t} + C_2 t,$$

где  $0 \leq t \leq 1$ ;  $\bar{t} = 1 - t$ ,  $0 \leq \varphi' \leq (\pi - \beta')$ .

Установим взаимосвязь между текущими параметрами направляющих линий отрезков прямой и дугой окружности:  $\varphi' = t(\pi - \beta')$ .

Тогда:

$$N_B = (B_1 - B_3)\sigma + (B_2 - B_3)\tau + B_3,$$

где  $\sigma = \frac{\sin(\beta' + t(\pi - \beta'))\sin(\gamma' - t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'}$ ,  $\tau = \frac{2 \cos \gamma' \sin(\beta' + t(\pi - \beta'))\sin(t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'}$ .

Подставив в уравнение образующей окружности уравнения направляющих, получим точечное уравнение поверхности:

$$M = (A_1\bar{t} + A_2t - C_1\bar{t} - C_2t)\lambda + ((B_1 - B_3)\sigma + (B_2 - B_3)\tau + B_3 - C_1\bar{t} - C_2t)\psi + C_1\bar{t} + C_2t,$$

Базовую систему параметрических уравнений здесь не приводим, ввиду больших размеров.

Координаты узловых точек:

$$x_{A_1} = 0; y_{A_1} = \frac{a}{2}; z_{A_1} = 0; \quad x_{A_2} = 0; y_{A_2} = -\frac{a}{2}; z_{A_2} = 0;$$

$$x_{B_1} = \frac{l}{2}; y_{B_1} = \frac{a}{2}; z_{B_1} = 0; \quad x_{B_2} = \frac{l}{2}; y_{B_2} = 0; z_{B_2} = -\Delta z; \quad x_{B_3} = \frac{l}{2}; y_{B_3} = -\frac{a}{2}; z_{B_3} = 0;$$

$$x_{C_1} = l; y_{C_1} = \frac{a}{2}; z_{C_1} = 0; \quad x_{C_2} = l; y_{C_2} = -\frac{a}{2}; z_{C_2} = 0;$$

Параметрические уравнения поверхности:

$$\begin{cases} x = -l \left( \frac{\sin(\beta + \varphi)\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi)\sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right); \\ y = a \left( \frac{\sin(\beta' + t(\pi - \beta'))\sin(\gamma' - t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'} + \frac{\cos \gamma' \sin(\beta' + t(\pi - \beta'))\sin(t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'} + t - 1 \right) \cdot \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi)\sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{a}{2} - at; \\ z = -4\Delta z \frac{\cos \gamma' \sin(\beta' + t(\pi - \beta'))\sin(t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'} \cdot \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi)\sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}. \end{cases}$$

На рисунке 8 приведена визуализация поверхности мембранного покрытия, вогнутого в двух направлениях, выполненная с помощью программного пакета Maple.

Исходя из общей схемы мембранного покрытия в этом случае (рис. 10) можно сделать заключение, что поверхности верхней и нижней полок двутавра и его стенки будут совпадать с моделью поверхности, вогнутой в одном направлении.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫХ ПОВЕРХНОСТИ МЕМБРАННОГО ПОКРЫТИЯ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ И ОПОРНОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

На рисунке 9 представлена общая геометрическая схема выпукло-вогнутого мембранного покрытия на прямоугольном плане и опорной двутавровой балки.

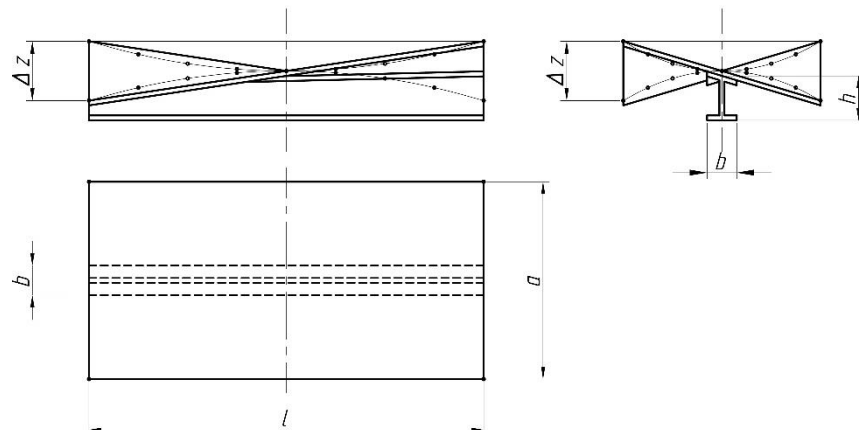
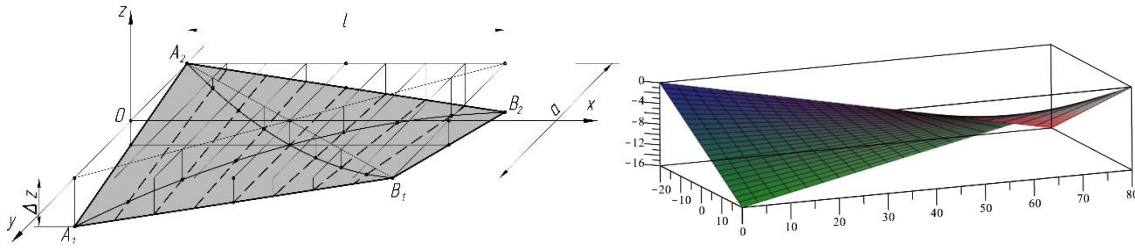


Рис. 9. Общая геометрическая схема выпукло-вогнутого мембранного покрытия с опорной балкой  
Fig. 9. General geometric scheme of a convex-concave membrane coating with a support beam

**Моделирование поверхности выпукло-вогнутого мембранного покрытия**

С геометрической точки зрения выпукло-вогнутая поверхность представляет собой гиперболический параболоид. Такую линейчатую поверхность мембранного покрытия можно

реализовать по следующей геометрической схеме (рис. 10): два отрезка прямых  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ , являются направляющими для построения поверхности, и текущий отрезок прямой – образующей линии поверхности.



**Рис. 10.** Геометрическая схема линейчатой поверхности мембранного покрытия и её визуализация  
**Fig. 10.** Geometric scheme of the linear surface of the membrane covering and its visualization

Уравнение образующей прямой:

$$M = N_A \bar{v} + N_B v,$$

где  $0 \leq v \leq 1$ ;  $\bar{v} = 1 - v$ .

Уравнение направляющих:

$$N_A = A_1 \bar{u} + A_2 u, \quad N_B = B_1 \bar{u} + B_2 u, \quad \text{где } 0 \leq u \leq 1; \quad \bar{u} = 1 - u.$$

Подставив в уравнение образующей уравнения направляющих, получим уравнение поверхности:

$$M = (A_1 \bar{u} + A_2 u) \bar{v} + (B_1 \bar{u} + B_2 u) v.$$

Базовая система параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = (x_{A_1} \bar{u} + x_{A_2} u) \bar{v} + (x_{B_1} \bar{u} + x_{B_2} u) v; \\ y = (y_{A_1} \bar{u} + y_{A_2} u) \bar{v} + (y_{B_1} \bar{u} + y_{B_2} u) v; \\ z = (z_{A_1} \bar{u} + z_{A_2} u) \bar{v} + (z_{B_1} \bar{u} + z_{B_2} u) v. \end{cases}$$

Координаты узловых точек:

$$\begin{aligned} x_{A_1} = 0; \quad y_{A_1} = \frac{a}{2}; \quad z_{A_1} = -\Delta z; \quad x_{A_2} = 0; \quad y_{A_2} = -\frac{a}{2}; \quad z_{A_2} = 0; \\ x_{B_1} = l; \quad y_{B_1} = \frac{a}{2}; \quad z_{B_1} = 0; \quad x_{B_2} = l; \quad y_{B_2} = -\frac{a}{2}; \quad z_{B_2} = -\Delta z. \end{aligned}$$

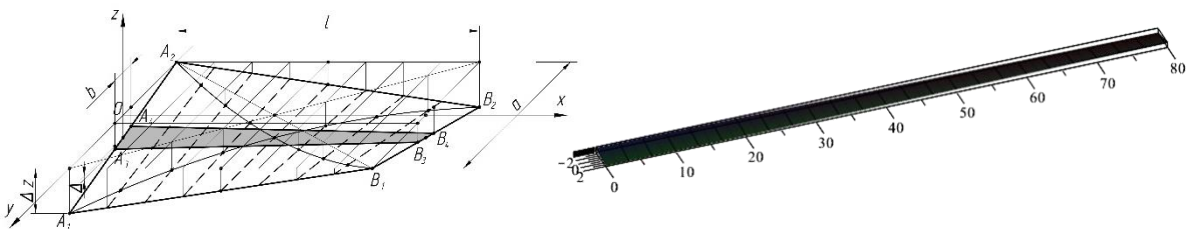
Параметрические уравнения поверхности с учётом узловых точек:

$$\begin{cases} x = lv; \\ y = a \left( \frac{1}{2} - u \right); \\ z = -\Delta z (1 - u - v + 2uv). \end{cases}$$

На рисунке 10 приведена визуализация выпукло-вогнутой поверхности мембранного покрытия, выполненная с помощью программного пакета Maple.

**Моделирование линейчатой поверхности верхней полки двутавровой балки для выпукло-вогнутого мембранного покрытия**

Верхняя полка двутавра совпадает с поверхностью мембранного покрытия (рис. 11).



**Рис. 11.** Геометрическая схема поверхности верхней полки двутавра и её визуализация  
**Fig. 11.** Geometric scheme of the top shelf surface of the I-beam and its visualization

В этом случае мы в праве использовать полученное в ранее уравнение линейчатой поверхности и базовую система параметрических уравнений.

С учётом координат узловых точек, получим параметрические уравнения поверхности верхней полки двутавра:

$$\begin{cases} x = lv; \\ y = b\left(\frac{1}{2} - u\right); \\ z = -\frac{\Delta z}{2}\left(1 + \frac{b}{a} - 2u\frac{b}{a} - 2v\frac{b}{a} + 4uv\frac{b}{a}\right). \end{cases}$$

На рисунке 11 приведена визуализация поверхности верхней полки опорного двутавра для выпукло-вогнутого мембранного покрытия, выполненная с помощью программного пакета Maple.

Исходя из общей схемы мембранного покрытия в этом случае (рис. 9) можно сделать вывод, что поверхность нижней полки двутавра будет горизонтальным прямоугольником с размерами  $b \times l$ , а его стенка будет вертикальным прямоугольником размерами  $h \times l$ , которые легко моделируются в любой системе конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций и потому в статье не приводятся.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате корректного использования математического аппарата БН-исчисление в работе получены геометрические и компьютерные модели поверхностей мембранного покрытия различной формы на прямоугольном плане и поверхностей, образующих двутавровую балку, которые используются для проведения вычислительного эксперимента по компьютерному исследованию напряженно-деформированного состояния полученных поверхностей мембранного покрытия. При этом толщина материала мембранного покрытия и поверхностей, совокупность которых образует двутавровую балку, была проигнорирована. Подобные характеристики, как и физико-механические свойства материала необходимые для расчёта напряжённо-деформированного состояния, задаются непосредственно в вычислительной системе конечно-элементного анализа. Также следует отметить, что в процессе визуализации, компьютерные модели полученных поверхностей, представленные в формате \*.dxf, уже были разбиты на конечные элементы нужного размера и полностью готовы к импорту любую систему конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния исследуемой конструкции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конопацкий, Е.В. Принципы построения компьютерных моделей многофакторных процессов методом многомерной интерполяции / Конопацкий Е.В. // Сборник материалов II Международной научно-практической конференции: «Программная инженерия: методы и технологии разработки информационно-вычислительных систем (ПРИИВС-2018)» (14-15 ноября 2018 г.). – Донецк: ДонНТУ, 2018. – С. 277-287.
2. Конопацкий, Е.В. Моделирование дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки / Е.В. Конопацкий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: 2019. – № 2. – С. 30-36. – DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.030-036.
3. Метод подвижного симплекса при конструировании 2-поверхностей многомерного пространства / Балюба И.Г. и [др.] // Моделювання та інформаційні технології: Збірник наукових праць. – К.: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, 2010. – Т.1. – С.310-318.
4. Давыденко, И.П. Конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / И.П. Давыденко. – Макеевка, 2012. – 186 с.
5. Балюба, И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / И.Г. Балюба. – Макеевка, 1995. – 227 с.
6. Балюба, И.Г. Точечное исчисление: учебное пособие / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. В.М. Верещаги. – Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.
7. Введение в математический аппарат БН-исчисление / Бумага А.И., Конопацкий Е.В., Крысько А.А., Чернышева О.А. // Материалы VII Международной научно-практической интернет-конференции «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом ВУЗе: традиции и инновации». – Пермь: ПНИПУ, 2017. – Вып. 4. – С. 76-82.
8. Конопацкий, С.В. Використання узагальнених тригонометричних функцій для визначення плоских кривих / Конопацький С.В., Балюба І.Г., Верещага В.М. // Прикладна геометрія

та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – Вип. 4. – Т. 57. – С.119-124.

## REFERENCES

1. Konopatskiy, E.V. Principles of construction of computer models of multifactor processes and phenomena by the method of multidimensional interpolation // Proceedings of the II International scientific and practical conference: "Software engineering: methods and technologies of development of information and computing systems (PIIVS-2018)" (14-15 November 2018). Donetsk: DonNTU, 2018. pp. 277-287. (In Russian)
2. Konopatskiy E.V. Modeling of arcs of curves passing through predetermined points // Bulletin of computer and information technologies. Moscow: 2019. No. 2. 30-36 pp. DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.030-036. (In Russian)
3. Method of rolling of the simplex in the design of the 2-surfaces in the multidimensional space / Baluba I.G., Polishchuk V.I., Garyagin B.F., Malyutina T.P., Davidenko I.P., Konopatskiy E.V., Kokareva J.A. // modeling and information technologies: collection of scientific works. Kiev: Institute of modeling problems in power engineering. G.E. Pukhov NAS of Ukraine, 2010. Vol.1. P. 310-318. (In Russian)
4. Davydenko, I.P. Designing surfaces of spatial forms by the method of mobile simplex: dis. ... kand. Techn. Sciences: 05.01.01. / I.P. Davydenko. - Makeyevka, 2012. - 186 p. (In Russian)
5. Baluba I.G. Constructive geometry of varieties in point calculus: dis. Dr. Techn. Sciences: 05.01.01. Makeyevka, 1995. 227 p. (In Russian)
6. Baluba I.G., Naidysh V.M. Point calculus: textbook. Melitopol: MSPU them B.Khmelnitskiy, 2015. 236 p. (In Russian)
7. Introduction to the mathematical apparatus of BN-calculation / Bumaga A.I., Konopatskiy E.V., Krysko A.A., Chernysheva O.A. // Materials VII of the International Scientific and Practical Internet Conference "Problems of the quality of graphic training of students in technical university: tradition and innovation." - Perm: PNIPU, 2017. Issue. 4. pp. 76-82. (In Russian)
8. Konopatskiy, E.V. Using generalized trigonometric functions to define plane curves / Konopatskiy E.V., Baluba I.G., Vereshaga V.M. // Applied geometry and engineering graphics. - Melitopol: TDAТУ, 2013. - Issue. 4. - T. 57. - Page 119-124. (In Russian)

## GEOMETRIC AND COMPUTER MODELING OF CURVED SURFACES OF MEMBRANE COVERS ON A RECTANGULAR PLAN

Alexandra Krysko

Donbas national Academy of civil engineering and architecture, 286123, Donetsk Peoples Republic, Makeyevka, Derzhavina str., 2, a.a.krysko@donnasa.ru

**Abstract.** The article offers an analytical description and computer models of three curved surfaces of the membrane covering on a rectangular plan, which include a surface model that is concave in one direction, in two directions, and convex-concave. All models are obtained based on the following conceptual sequence of actions: geometric scheme of the model – analytical description in BN-calculus – computer model of the desired surface. This approach allows you not only to get a computer model of the desired geometric object in the desired parameterization, but also to make the necessary adjustments at each stage of modeling. Geometrically, all the guide lines and forming lines of the modeled surfaces consist of simple geometric objects such as straight lines and circles. However, they were determined not only in the desired parameterization in this way, but also taking into account their mutual position, which determines the initial reference lines and the set value of the maximum deflection of the beam and membrane shells. The obtained analytical descriptions of geometric objects are combined into a computational algorithm implemented in the Maple software package. As a result, the visualized computer models of the obtained surfaces were exported to dxf format, taking into account the required density of rectangular finite elements for direct import into the system of finite element analysis of the stress-strain state of SCAD Office structures, followed by a computational experiment. Thus, all geometric information, taking into account the choice of the density of the finite element network, is provided by the proposed approach to modeling membrane covering shells under pre-set conditions, and the physical and mechanical properties of the material necessary for calculating the stress-strain state of structures are set directly in the computational system of finite element analysis in the modeling process.

**Key words:** geometric modeling, curved surface, ruled surface, membrane covering, rectangular plan, circle arc.